PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA *CRAB GRAPH* (Cr_n), *SQUID GRAPH* (Sq_n) DAN *JELLYFISH GRAPH* (Jf_n)

SKRIPSI

DINDA MULYASARI
NIM. 202120004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS PERTANIAN, SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ABDURACHMAN SALEH SITUBONDO
TAHUN 2025

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA *CRAB GRAPH* (Cr_n), *SQUID GRAPH* (Sq_n) DAN *JELLYFISH GRAPH* (Jf_n)

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo

DINDA MULYASARI

NIM. 202120004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS PERTANIAN, SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ABDURACHMAN SALEH SITUBONDO

TAHUN 2025

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dinda Mulyasari
NIM	: 202120004
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Pertanian, Sains dan Teknologi
Universitas	: Universitas Abdurachman Saleh Situbondo

Dengan ini menyatakan bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul **"Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)"** adalah hasil karya saya sendiri. Dalam proses penyusunan karya ini, saya telah menggunakan bantuan teknologi kecerdasan buatan (*Artificial Intelligence*/AI) sebagai alat pendukung. Penggunaan teknologi tersebut dilakukan dengan tetap mematuhi etika akademik, tidak melakukan plagiarisme, sesrta memastikan bahwa seluruh isi karya telah diverifikasi, diedit, dan disesuaikan dengan pemahaman sesrta analisis pribadi saya.

Saya juga menyatakan bahwa:

1. Karya tulis ini sepenuhnya bebas dari plagiarisme, baik secara keseluruhan maupun sebagian.
2. Segala referensi dan sumber yang digunakan telah dicantumkan dengan jelas dan sesuai dengan kaidah penulisan ilmiah.
3. Penggunaan AI hanya besifat alat bantu, seperti pengolahan data, penyusunan draf, atau penyempurnaan bahasa, tanpa menggantikan proses berfikir kritis, analisis, dan pengambilan keputusan yang sepenuhnya saya lakukan sendiri.

Apabila di kemudian hari ditemukan pelanggran terhadap pernyataan ini, saya siap menerima konsekuensi sesuai dengan peraturan yang berlaku di Universitas Abdurachman Saleh Situbondo.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Situbondo, 14 Agustus 2025

Yang membuat pernyataan,

Dinda Mulyasari

NIM. 202120004

LEMBAR PERSETUJUAN SKRIPSI

JUDUL SKRIPSI	: Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)
NAMA	: Dinda Mulyasari
NIM	: 202120004
PROGRAM STUDI	: Matematika

Situbondo, 14 Agustus 2025

Menyetujui, Dosen Pembimbing Utama	Menyetujui, Dosen Pembimbing Anggota
Santoso, M.Si NIDN. 0717038401	Risan Nur Santi, M.Si NIDN. 0711079305

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Saiful Akbar, S.E., M.Si
NIDN. 0728058707

PENGESAHAN UJIAN SKRIPSI

JUDUL SKRIPSI	: Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)
NAMA	: Dinda Mulyasari
NIM	: 202120004
PROGRAM STUDI	: Matematika

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo pada Kamis, 14 Agustus 2025.

Dewan Penguji

1. Ketua Penguji	Desi Indriyani, S.Pd., M.Si. NIDN. 0708029005	....
2. Anggota I	Santoso, M.Si. NIDN. 0717038401	....
3. Anggota II	Risan Nur Santi, M.Si. NIDN. 0711079305	....

Mengesahkan

Dekan,

Ir. Andina Mayangsari, M.M.

NIDN. 0009066601

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Abdurachman Saleh Situbondo, saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dinda Mulyasari
NIM	: 202120004
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Pertanian, Sains dan Teknologi
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Abdurachman Saleh Situbondo Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-Exclusive Royalty Fee Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)

Hak Bebas Royalti Noneksklusif untuk Universitas Abdurachman Saleh Situbondo berhak menyimpan, menggalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik hak cipta.

Dibuat	: di Situbondo
Pada tanggal	: 14 Agustus 2025

Yang menyatakan,

Dinda Mulyasari

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kepada Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini guna memenuhi persyaratan mencapai gelar Sarjana Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo. Karya ini tidak akan berhasil tanpa bimbingan, arahan dan kerjasama dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muhammad Yusuf Ibrahim, S.H., M.H. selaku Rektor Universitas Abdurachman Saleh Situbondo.
2. Ibu Ir. Andina Mayangsari, M.M. selaku Dekan Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo.
3. Bapak Saiful Akbar, S.E., M.Si. selaku Kaprodi Matematika Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo.
4. Bapak Santoso, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penulisan skripsi ini.
5. Ibu Risan Nur Santi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penulisan skripsi ini.
6. Bapak/Ibu dosen Program Studi Matematika Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo yang telah memberikan dorongan/semangat dan membimbing dengan baik selama perkuliahan.
7. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Ibu Dr. Ika Hesti Agustin, M.Si., serta Ibu Indah Lutfiyatul Mursyidah, M.Pd. yang telah memberikan ilmunya dan menjadi mentor graf.

Penulis berharap karya skripsi ini bermanfaat dan dapat memberikan sumbangan yang berarti bagi pihak – pihak yang membutuhkan.

Situbondo, 14 Agustus 2025

Penulis

PERSEMBAHAN

Dengan memanjatkan puji Syukur ke hadirat Allah SWT, karya ini dengan penuh hormat saya persembahkan kepada:

1. Kedua orang tua saya, Ayah Sutik Biarto (alm.) dan Ibu Umi Kalsum yang selalu menjadi penyemangat terbaik dalam hidupku dan terimakasih atas kasih sayang, perhatian, dan doa yang menjadi sumber kekuatanku.
2. Kakak saya Desi Indriyani dan keluarga besar yang selalu menyemangati, membantu dan mendoakanku.
3. Tunangan saya Adhenta yang juga selalu menyemangatiku dan mengajarkanku banyak hal.

Semoga karya ini dapat memberi manfaat dan menjadi bagian dari upaya peningkatan kualitas akademik.

MOTTO

"*Love Yourself, Speak Yourself*"

(BTS)

ABSTRAK

Dinda Mulyasari, NIM. 202120004, Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n).

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang mempelajari objek berupa titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) beserta hubungan di antara keduanya. Salah satu topik yang berkembang adalah pelabelan dan pewarnaan graf, termasuk pewarnaan lokal sisi *antimagic*, yaitu pewarnaan yang diperoleh dari pelabelan titik sehingga bobot sisi yang bertetangga berbeda dan jumlah warna yang digunakan minimum. Penelitian ini bertujuan menentukan kardinalitas dan bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n), dan *Jellyfish Graph* (Jf_n) untuk $n \geq 3$. Metode yang digunakan adalah deduktif aksiomatik dengan pendekatan pendeteksian pola. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk *Crab Graph* (Cr_n) memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$ dan bilangan kromatiknya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 4$. *Squid Graph* (Sq_n) kardinalitas yaitu $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$ dan bilangan kromatiknya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. *Jellyfish Graph* (Jf_n) memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$ dan bilangan kromatiknya yaitu yaitu $x_{lea}(\text{Jf}_n) = n + 3$.

Kata kunci: teori graf, pelabelan, pewarnaan lokal sisi *antimagic*.

ABSTRACT

Dinda Mulyasari, NIM. 202120004, *Local Edge Antimagic Coloring on Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) *and Jellyfish Graph* (Jf_n).

Graph theory is a branch of discrete mathematics concerned with the study of vertices and edges, as well as the relationships between them. Among the various topics in this field, labeling and coloring have received considerable attention, including local edge antimagic coloring—a coloring obtained by assigning labels to vertices such that adjacent edges have distinct weights, while minimizing the number of colors used. This study aims to determine the cardinality and chromatic number of local edge antimagic coloring for the Crab Graph (Cr_n), Squid Graph (Sq_n), and Jellyfish Graph (Jf_n) with $n \geq 3$. *The research employs an axiomatic deductive method combined with pattern detection to identify general labeling structures. The results indicate that for the Crab Graph (Cr_n), the cardinalities are* $|V| = 2n + 4$ *and* $|E| = 2n + 5$ *with a chromatic number* $x_{lea}(Cr_n) = n + 4$. *For the Squid Graph (Sq_n) the cardinalities are* $|V| = n + 3$ *and* $|E| = n + 3$ *with a chromatic number* $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. *For the Jellyfish Graph (Jf_n) the cardinalities are* $|V| = 2n + 2$ *and* $|E| = 3n$ *with a chromatic number* $x_{lea}(Jf_n) = n + 3$.

Keywords: *graph theory, labeling, local edge antimagic coloring.*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
PERNYATAAN ORISINALITAS .... **ii**
LEMBAR PERSETUJUAN SKRIPSI .... **iii**
PENGESAHAN UJIAN SKRIPSI .... **iv**
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS .... **v**
KATA PENGANTAR .... **vi**
PERSEMBAHAN .... **vii**
MOTTO .... **viii**
ABSTRAK .... **ix**
ABSTRACT .... **x**
DAFTAR ISI .... **xi**
DAFTAR TABEL .... **xiii**
DAFTAR GAMBAR .... **xiv**
DAFTAR LAMPIRAN .... **xv**
BAB 1. PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA **4**
2.1 Penelitian Terdahulu 4
2.2 Terminologi Graf 5
2.3 Jenis Graf 6
2.4 Fungsi 8
2.5 Barisan Aritmatika 9
2.6 Pelabelan Graf 9
2.7 Pewarnaan Graf 10
2.8 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* 11

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN **12**
3.1 Jadwal Penelitian 12
3.2 Metode Penelitian 12
3.3 Data Penelitian 12
3.4 Alur Penelitian 13
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN **15**
4.1 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Crab Graph* (Cr_n) 16
4.2 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Squid Graph* (Sq_n) 19
4.3 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Jellyfish Graph* (Jf_n) 21
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN **24**
5.1 Kesimpulan 24
5.2 Saran 24
DAFTAR PUSTAKA **26**
LAMPIRAN **28**

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Penelitian Terdahulu 4

Tabel 3.1 Jadwal Penelitian... 12

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G 6
Gambar 2.2 Jellyfish Graph (Jn, n) 6
Gambar 2.3 Graf Vocano (Vn) 7
Gambar 2.4 Graf $S'(K1, n)$ 7
Gambar 2.5 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, (c) Fungsi Bijektif 8
Gambar 2.6 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, (c) Pelabelan Total 10
Gambar 2.7 (a) Pewarnaan Titik, (b) Pewarnaan Sisi, (c) Pewarnaan Wilayah ... 11
Gambar 3.1 Alur Penelitian.. 14
Gambar 4.1 Crab Graph (Cr_n) 15
Gambar 4.2 Squid Graph (Sq_n) 15
Gambar 4.3 Jellyfish Graph (Jf_n) 16
Gambar 4.4 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Crab Graph (Cr_3) 18
Gambar 4.5 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Crab Graph (Cr_4) 18
Gambar 4. 6 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Crab Graph (Cr_5) 18
Gambar 4.7 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Squid Graph (Sq_3) 20
Gambar 4.8 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Squid Graph (Sq_4) 20
Gambar 4.9 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Squid Graph (Sq_5) 21
Gambar 4.10 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Jellyfish Graph (Jf_3) 23
Gambar 4.11 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Jellyfish Graph (Jf_4) 23
Gambar 4.12 Pewarnaan lokal sisi antimagic pada Jellyfish Graph (Jf_5) 23

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Riwayat Hidup 28

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu yang berada di dalam matematika diskrit. Pada bidang ini, sering digunakan untuk membantu memecahkan suatu persoalan dengan merepresentasikan objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut. Teori ini mempunyai keunikan karena kesederhanaan objek yang diteliti yaitu berupa titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Representasi suatu graf yaitu dengan menyatakan objek sebagai titik, sehingga hubungan antar objek tersebut dapat dinyatakan dengan sisi. Wilson (2015) menyatakan bahwa, suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*). Menurut Ah (2011), Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik u dan v yang berbeda di V yang disebut sisi (*edge*).

Teori graf mengalami perkembangan yang sangat luas, salah satu topik yang menarik dan telah dikembangkan dalam teori ini yaitu pelabelan dan pewarnaan graf. Menurut Rezekina (2016), Pelabelan pada graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan bulat positif. Secara umum, objek kajiannya berupa graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bilangan asli yang disebut label. Selain itu, Parkhurst (2014) juga menyatakan bahwa Pelabelan (*labeling*) pada suatu graf adalah pemetaan atau dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik (atau himpunan sisi), maka pelabelannya disebut pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total. Menurut Rahman dkk (2019), Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut sebagai bobot sisi. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib (*antimagic*). Awal mula penelitian tentang pelabelan *antimagic* ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990.

Topik menarik dalam teori graf tidak hanya meliputi pelabelan graf, tetapi juga meliputi pewarnaan graf. Menurut Fatihah (2017), Pewarnaan graf merupakan kasus khusus dari pelabelan graf yang memiliki tiga mavam aspek yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada pewarnaan graf, titik atau sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Selain itu, pemberian warna tersebut harus menggunakan k warna yang minimal, yang disebut bilangan kromatik. Salah satu penelitian tentang pewarnaan graf yang menarik yaitu tentang pewarnaan lokal *antimagic*. Pada tahun 2017, Arumugam dkk pertama kali memperkenalkan tentang pewarnaan lokal titik *antimagic*. Hasil penelitian tentang pewarnaan lokal titik antimagic yang dilakukan oleh Arumugam dkk (2017) yaitu pada graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap, graf persahabatan, graf roda, graf bipartit, dan graf komplit bipartit. Selain itu, Rohmatillah (2018) juga melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*.

Berdasarkan penelitian terdahulu yang telah dipaparkan, maka diperlukan penelitian dengan topik pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n). Penelitian ini dilakukan karena pencarian bilangan kromatik pada topik ini berbeda dari biasanya. Prosesnya dimulai dengan mencari pelabelannya terlebih dahulu agar bobot sisi yang bertetangga berbeda dan memperoleh warna yang minimum.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana menentukan kardinalitas pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)?
2. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui kardinalitas pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n).
2. Untuk mengetahui bilangan kromatik pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n).

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Menambah referensi dan literatur pada perpustakaan yang dapat digunakan sebagai kajian untuk penelitian yang sejenis khususnya pada bidang graf.
2. Menambahkan wawasan dan pengetahuan penelitian secara khusus mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n).

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya membahas pewarnaan lokal sisi *antimagic*, tidak termasuk pewarnaan titik atau wilayah.
2. Objek graf yang diteliti terbatas pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n), *Jellyfish Graph* (Jf_n) masing-masing dengan nilai $n \geq 3$.
3. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan pada titik (*vertex*) graf dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,\dots,|V(G)|\}$.
4. Penelitian ini berfokus untuk menentukan bobot sisi berdasarkan jumlah label titik-titik yang bersebelahan, memastikan bobot sisi yang bersebelahan (bertetangga) berbeda (sifat *antimagic* lokal), dan menentukan bilangan kromatik minimum dari pewarnaan lokal sisi *antimagic*.
5. Penelitian tidak mencakup pengembangan algoritma otomatisasi atau aplikasi perangkat lunak pewarnaan graf.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian ini, terdapat beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan dengan topik yang akan diteliti dan sebagai acuan atau pembanding bagi penelitian ini. Tabel berikut menjelaskan identitas penelitian sebelumnya dan hasil peneltiannya.

Tabel 2.1 Penelitian Terdahulu

Nama dan Tahun	Judul	Hasil
Nofrian Rohmatillah, 2018	Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi *Shackle*	Bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* pada graf pohon pisang $B_{2,n}$ untuk $n \geq 3$ adalah $n \leq \gamma_{lea}(B_{2,n}) \leq n+1$, graf bintang ganda $S_{n,n}$ untuk $n \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(S_{n,m}) = n+1$, graf ulat teratur $c_{n,m}$ untuk $n = 2, m \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(C_{n,m}) = m+1$, dan untuk $n, m \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(C_{n,m}) = m+2$, graf kembang api $F_{n,m}$ untuk $n, m \geq 3$ adalah $m \leq \gamma_{lea}(F_{n,m}) \leq m+1$. Bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* pada graf hasil operasi *shackle* yaitu $shack(S_n, v, m)$ untuk $n, m \geq 3$ memiliki nilai yang sama dengan graf dasarnya (graf bintang S_n) yaitu $\gamma_{lea}(S_n) = \gamma_{lea} shack(S_n, v, m) = n$ sesuai $\Delta(shack(S_n, v, m)) = n$.
Enik Nur Sa'adah, 2018	Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Roda Graf Hasil Operasi Amalgamasi C_3, Bt_2, $K_{2,3}$, W_3	Bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* dari graf amalgamasi graf siklus $(amal(C_3, v, n))$, amalgamasi graf buku segitiga $(amal(Bt_2, v, n))$,

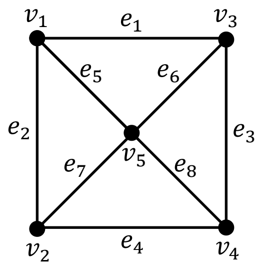
Nama dan Tahun	Judul	Hasil
		amalgamasi graf bipartit komplet $(amal(K_{2,3}, v, n))$, dan amalgamasi graf roda $(amal(W_3, v, n))$, adalah sesuai dengan derajat maksimum graf tersebut.
Dian Sri Rahmadani, 2024	Pewarnaan Lokal Sisi Anti-Ajaib pada Graf Gear, Graf Semi Parasut, dan Graf Kipas	Bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib pada Graf Gear (G_n), Graf Semi Parasut (SP_{2n-1}), dan Graf Kipas (F_n) beruturut-turut adalah $\chi_{lea}(G_n) = n + 2$, $\chi_{lea}(SP_{2n-1}) = n + 2$, Dan $\chi_{lea}(F_n) = n + 2$, untuk n ganjil dan n genap.

Sumber: Skripsi

2.2 Terminologi Graf

Menurut Munir (2016), Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan adalah (*V,E*), ditulis dengan notasi $G = (V(G), E(G))$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Susanto (2016) juga menyatakan bahwa, sebuah graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan Graf adalah pasangan himpunan $G = (V,E)$ dimana *V* adalah himpunan titik (*vertex*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua buah titik. Menurut Fatihah (2017), Graf (*graph*) adalah himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex*) yang terhubung oleh sisi (*edge*). Menurut Slamin (2019), sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut graf *trivial* (Munir, 2016).

Order dari sebuah graf merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh graf tersebut dan dinotasikan dengan $|V|$, sedangkan *size* merupakan banyaknya sisi yang dimiliki sebuah graf dan dinotasikan sebagai $|E|$ (Slamin, 2019). Berikut merupakan contoh graf *G*.



Gambar 2.1 Graf G (Umami, 2018)

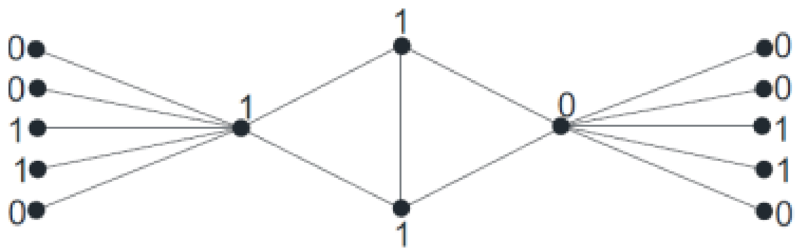
Graf G diatas terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Pada graf tersebut memiliki $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$ (Umami, 2018). Menurut Gia dkk (2024), jika dua simpul *u* dan *v* dari suatu graf G dihubungkan oleh sebuah sisi $e = uv$ maka simpul *u* dan *v* disebut bertetangga (*adjacent*) dan sisi *e* disebut bersisian (*incident*) dengan simpul *u* dan *v*. Banyaknya sisi yang bersisian dengan simpul *v* disebut (*deegre*) dan dinotasikan sebagai $d(v)$.

2.3 Jenis Graf

Berikut 3 graf yang sudah pernah diteliti, yaitu:

1. Jellyfish graph $J_{n,n}$ (Rokad, Amit H. ; Patadiya, Kalpesh M., 2017)

   Jellyfish graph $J_{n,n}$ adalah graf *cordial* dengan himpunan vertex $V(J_{n,n}) = \{u, v, x, y, u_i, v_i; ,1 \leq i \leq n\}$ dan himpunnan sisi $E(J_{n,n}) = \{ux, uy, vx, vy, xy, uu_i, vv_i; ,1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas himpunan vertex adalah $|V(J_n)| = 2n + 4$ dan kardinalitas himpunan sisi adalah $|E(J_n)| = 2n + 5$.

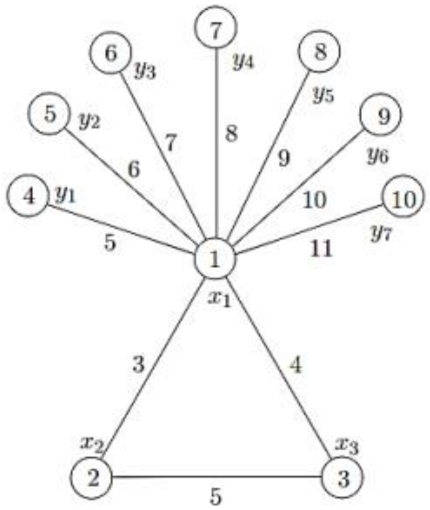


Gambar 2.2 *Jellyfish Graph* ($J_{n,n}$)

2. Graf Volcano V_n (Dafik dkk, 2023)

   Graf Volcano V_n adalah graf dengan himpunan vertex $V(V_n) = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunnan sisi $E(V_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{x_iy_i, 1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas himpunan vertex adalah

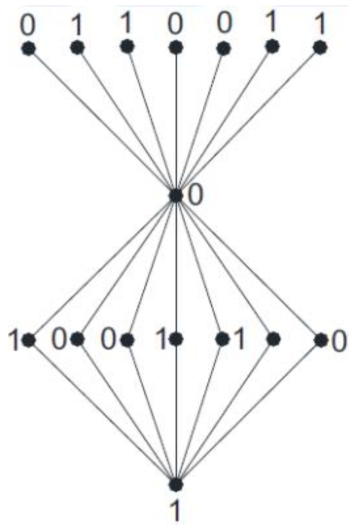
$|V(V_n)| = n + 3$ dan kardinalitas himpunan sisi adalah $|E(V_n)| = n + 3$. Berdasarkan definisi Volcano Graph, graf V_n memiliki derajat maksimum $\Delta(V_n) = n + 2$.



Gambar 2.3 *Graf Vocano* (V_7)

3. Graf $S'(K_{1,n})$ (Rokad, Amit H. ; Patadiya, Kalpesh M., 2017)

$S'(K_{1,n})$ adalah graf *cordial* dengan $v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah simpul-simpul gantung dan v adalah simpul puncak dari $(K_{1,n})$ serta $u, u_1, u_2, \cdots, v_n$ adalah simpul-simpul tambahan yang sesuai dengan $v, v_1, v_2, \cdots, v_n$ untuk mendapatkan $S'(K_{1,n})$. Kardinalitas himpunan vertex adalah $V|S'(K_{1,n})| = 2n + 2$ dan kardinalitas himpunan sisi adalah $V|S'(K_{1,n})| = 3n$.



Gambar 2.4 *Graf* $S'(K_{1,n})$

2.4 Fungsi

Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A dan B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A dan B kita menuliskan $f : A \rightarrow B$ yang artinya f memetakan A ke B. Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari f dan himpunan B disebut daerah hasil (*kodomain*) dari f (Munir, 2016).

Berikut jenis-jenis fungsi, yaitu:

a. Fungsi satu-satu (injektif)

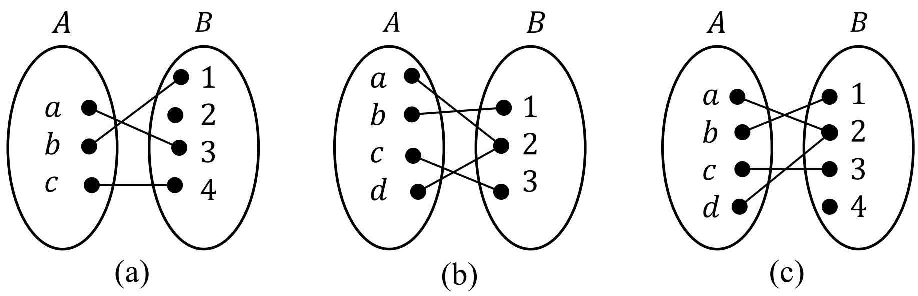
   Fungsi f dikatakan satu-satu (one-to-one) atau injektif (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A, maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya adalah $a = b$.

b. Fungsi pada (surjektif)

   Fungsi f dikatakan pada (*onto*) atau surjektif (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpuan B.

c. Fungsi korespondensi satu-ke-satu (bijektif)

   Fungsi f dikatakan berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.



Gambar 2.5 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, (c) Fungsi Bijektif (Munir, 2016)

2.5 Barisan Aritmatika

Menurut Rahmatullah (2021), barisan aritmatika adalah baris yang nilai setiap sukunya didapatkan dari suku sebelumnya melalui penjumlahan atau pengurangan dengan suatu bilangan. Menurut Susanto dkk (2021), barisan aritmatika adalah suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan. Beda pada barisan aritmatika dilambangkan dengan b. Jadi, rumus umum menentukan suku *ke-n* pada barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

$U_n =$ suku ke-n

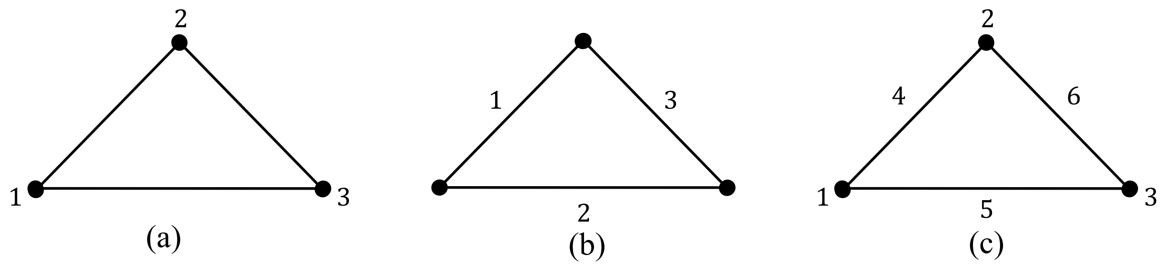
$a = U_1 =$ suku pertama

$n =$ nomor suku

$b =$ beda

2.6 Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan pemberian label. Akan disebut sebagai pelabelan titik, jika label diberikan pada setiap titik. Sebaliknya, jika label diberikan pada setiap sisi maka disebut sebagai pelabelan sisi, dan jika label diberikan pada setiap titik berikut sisinya maka disebut sebagai pelabelan total (Slamin, 2023). Menurut Nurhidayah dan Susanti (2022), secara umum pelabelan pada graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ merupakan fungsi dengan kodomainnya merupakan himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif) dan elemen-elemen dari G sebagai domainnya, yaitu himpunan simpul $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, atau kombinasinya dengan syarat tertentu. Berdasarkan pada domain pemetaan tersebut, pelabelan dapat dibedakan menjadi pelabelan *vertex* (simpul), pelabelan *edge* (sisi), dan jika domain pemetaan merupakan gabungan himpunan simpul dan himpunan sisi disebut pelabelan total. Menurut Wallis (2013), penjumlahan dari label sisi yang bersisihan (*incident*) pada suatu titik disebut bobot titik. Penjumlahan dua label titik yang melekat pada suatu sisi merupakan bobot sisi.



Gambar 2.6 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, (c) Pelabelan Total (Sa'adah, 2018)

2.7 Pewarnaan Graf

Munir (2016) menyatakan bahwa, pewarnaan graf terdiri dari 3 macam yaitu, pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan pada graf *G* adalah pemetaan warna-warna pada simpul, sisi, atau wilayah pada graf *G* sedemikian sehingga setiap simpul, sisi, atau wilayah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda (Afriantini dkk, 2019).

a. Pewarnaan titik (*vertex coloring*)

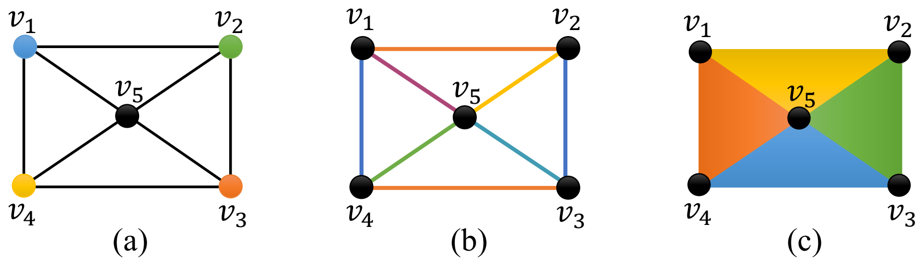
   Pewarnaan titik/simpul adalah suatu pemberian warna semua titik pada graf sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna berbeda. Pewarnaan simpul pada graf *G* adalah pemberian warna pada simpul-simpul di graf *G* sedemikian sehingga setiap dua simpul yang bertetangga (terhubung langsung) memiliki warna yang berbeda (Munir, 2016).

b. Pewarnaan sisi (*edge coloring*)

   Pewarnaan sisi adalah suatu pemberian warna semua sisi pada graf sehingga setiap dua sisi yang bertetangga memiliki warna berbeda. Pewarnaan sisi pada graf *G* adalah pemberian warna pada sisi-sisi di graf *G* sedemikian sehingga setiap dua sisi yang bertetangga (terhubung langsung) memiliki warna yang berbeda (Munir, 2016).

c. Pewarnaan wilayah (*region coloring*)

   Pewarnaan wilayah adalah suatu pemberian warna semua wilayah pada graf sehingga setiap dua wilayah yang bertetangga memiliki warna berbeda. Pewarnaan wilayah pada graf *G* adalah pemberian warna pada wilayah di graf *G* sedemikian sehingga setiap dua wilayah yang bertetangga (terhubung langsung) memiliki warna yang berbeda (Munir, 2016).



Gambar 2.7 (a) Pewarnaan Titik, (b) Pewarnaan Sisi, (c) Pewarnaan Wilayah

2.8 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic*

Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinisikan sebagai pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang bertetangga e_1 dan e_2, bobot e_1 tidak sama dengan bobot e_2, dimana bobot e didapat dari penjumlahan dari label titik yang bersisihan dengan sisi tersebut (Sa'adah, 2018). Penelitian pewarnaan lokal sisi *antimagic* dilakukan oleh Agustin dkk (2017). Pewarnaan lokal sisi *antimagic* didefinisikan sebagai berikut, sebuah bijeksi $f: V(g) \to \{1,2,3, \dots, |V(G)|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang bertetangga e_1 dan $e_2, w(e_1) \neq w(e_2)$, dimana $e = uv \in G, w(e) = f(u) + f(v)$. Sehingga, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf *G* jika setiap sisi e ditentukan warna $w(e)$. Banyak warna yang minimum untuk mewarnai pada pelabelan lokal sisi *antimagic* pada graf *G* disebut bilangan kromatik. Bilangan kromatik pada pewarnaan graf merupakan pewarnaan yang tidak boleh memiliki warna yang sama pada titik, sisi atau wilayah yang berdekatan dan warnanya harus seminimal mungkin.

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jadwal Penelitian

Berikut merupakan jadwal penelitian yang disusun untuk menggambarkan alur dan waktu pelaksanaan penelitian secara sistematis.

Tabel 3.1 Jadwal Penelitian

Kegiatan	Bulan 2024				Bulan 2025						
	Okt	Nov	Des	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Jun	Jul	Ags
Pengajuan judul											
Bimbingan proposal											
Ujian Proposal											
Perbaikan proposal											
Penelitian											
Bimbingan hasil penelitian											
Ujian skripsi											

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah yang akan diteliti. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema-teorema ataupun definisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema ataupun definisi-definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan lokal sisi *antimagic* sehingga diperoleh pola umum.

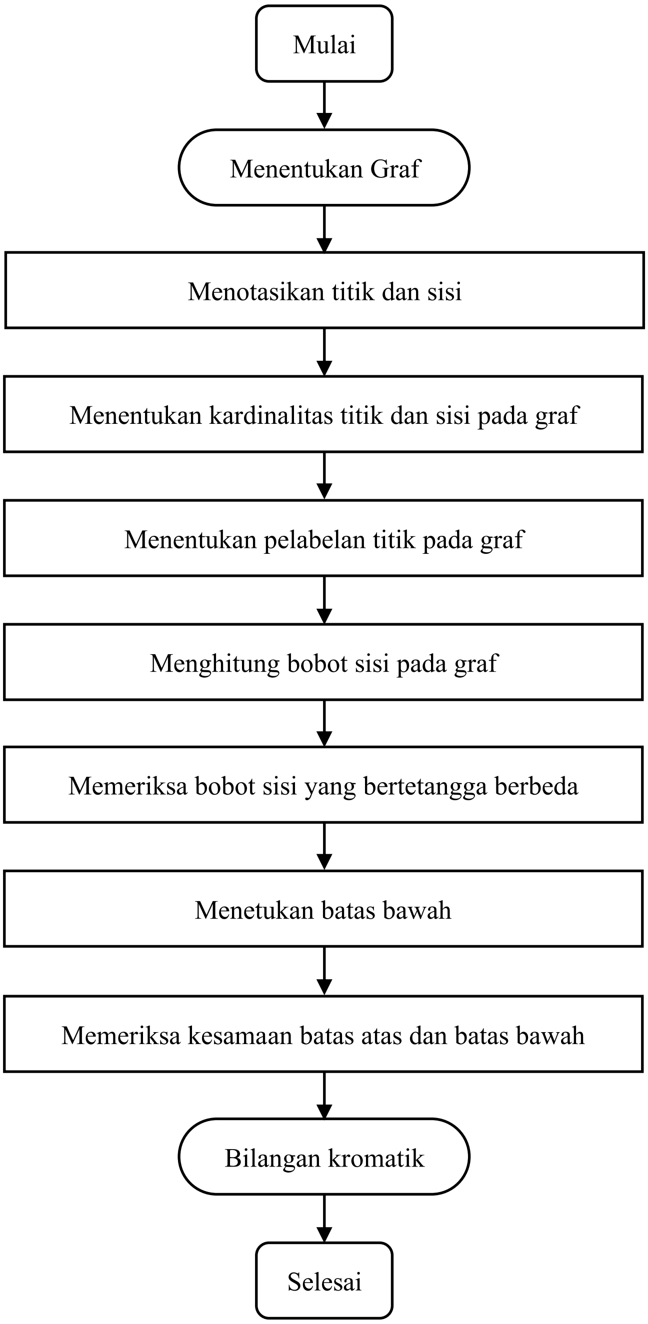
3.3 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n).

3.4 Alur Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n). Adapun alur penelitiannya adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf sebagai objek penelitian. Pada metode ini menentukan *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) dan *Jellyfish Graph* (Jf_n) sebagai objek penelitian.
b. Menotasikan titik dan sisi.
c. Menetukan kardinalitas sisi dan kardinalitas titik pada graf.
d. Menetukan pelabelan titik pada graf.
e. Menghitung bobot sisi pada graf.
f. Memeriksa apakah bobot sisi yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda.
g. Mengitung banyaknya bobot yang berbeda.
h. Menentukan batas bawah.
i. Memeriksa apakah batas bawah dan batas atas memiliki nilai yang sama.
j. Memperoleh bilangan kromatik.



Gambar 3.1 Alur Penelitian

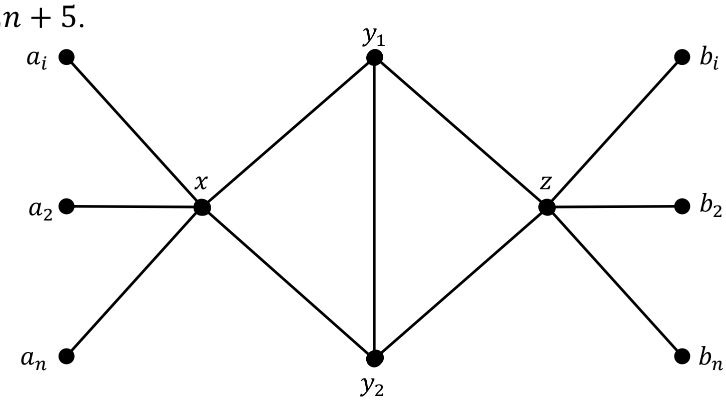
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, membahas mengenai 3 graf yang menjadi objek penelitian dan hasil penelitian dari "Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$), *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$), dan *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$)" yang dinyatakan dalam bentuk teorema beserta pembuktiannya.

Berikut 3 graf yang menjadi objek penelitian, yaitu:

1. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$)

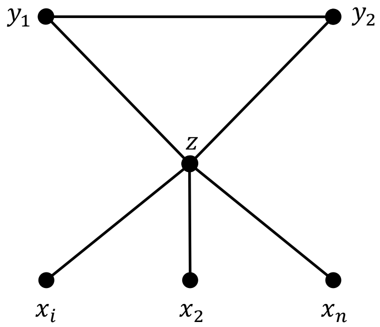
Crab Graph ($\mathrm{Cr_n}$) atau graf kepiting adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Cr_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zb_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$.



Gambar 4.1 *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$)

2. *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$)

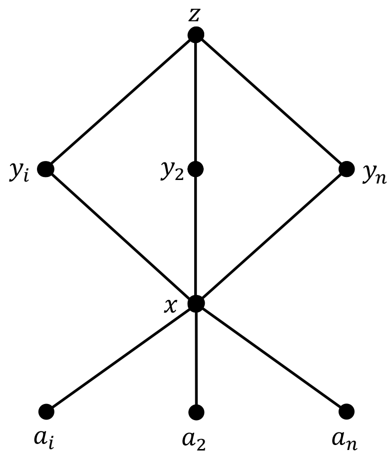
Squid Graph ($\mathrm{Sq_n}$) atau graf cumi-cumi adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Sq_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$.



Gambar 4.2 *Squid Graph* ($\mathrm{Sq_n}$)

3. *Jellyfish Graph* ($\mathrm{Jf_n}$)

Jellyfish Graph ($\mathrm{Jf_n}$) atau graf ubur-ubur adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Jf_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Jf}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Jf}_n) = \{xa_i, xy_i, zy_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$.



Gambar 4.3 ***Jellyfish Graph*** **($\mathrm{Jf_n}$)**

4.1 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$)

Crab Graph ($\mathrm{Cr_n}$) atau graf kepiting adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan $\mathrm{Cr_n}$ dengan himpunan titik $V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zb_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$.

Teorema 1. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$.

Bukti. *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(\mathrm{Cr}_n) = \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\} \cup \{b_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Crab Graph* ($\mathrm{Cr_n}$) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(\mathrm{Cr}_n) = \{xa_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{zy_i\,; 1 \leq i \leq 2\} \cup$$
$$\{zb_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1y_2\}$$

Graf kepiting ini memiliki kardinalitas titik $|V| = 2n + 4$ dan kardinalitas sisi $|E| = 2n + 5$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Crab Graph* (Cr_n). Himpunan titik a_i dilabeli dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik a_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(a_i) = 2i + 3$. Himpunan titik x dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(x) = 1$. Himpunan titik y_1, y_2 dilabeli dengan label $\{3,4\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = i + 2$. Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{2\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 2$. Himpunan titik b_i dilabeli dengan label $\{6, \cdots, 2n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik b_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(b_i) = 2i + 4$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 2i + 3 & v = a_i \\ 1 & v = x \\ i + 2 & v = y_i \\ 2 & v = z \\ 2i + 4 & v = b_i \end{cases}$$

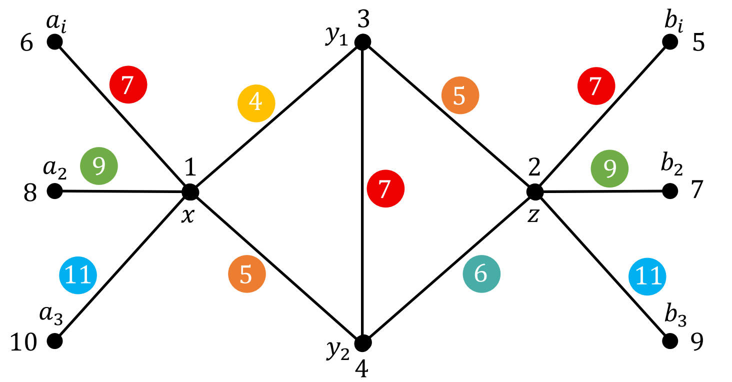
Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Crab Graph* (Cr_n). Himpunan sisi xa_i dibobotkan dengan label $\{6, \cdots, 2n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xa_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xa_i) = 2i + 4$. Himpunan sisi xy_i dibobotkan dengan label $\{4, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xy_i) = 2i + 2$. Himpunan sisi y_1y_2 dibobotkan dengan label $\{7\}$. Sehingga diperoleh $w(y_1y_2) = 7$. Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{5, n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = i + 4$. Himpunan sisi zb_i dibobotkan dengan label $\{8, \cdots, 2n + 6\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zb_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zb_i) = 2i + 6$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

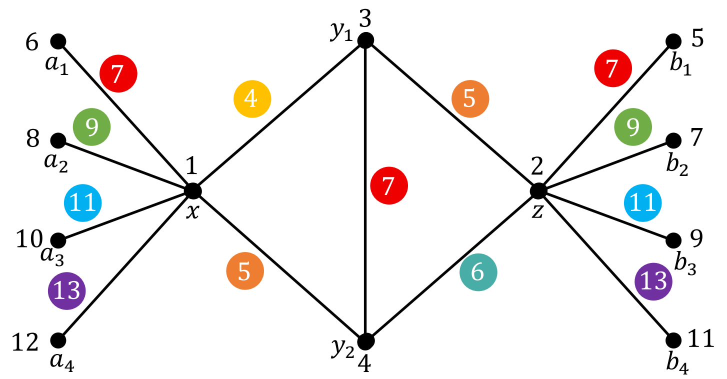
$$w(e) = \begin{cases} 2i + 4 & e = xa_i \\ 2i + 2 & e = xy_i \\ 7 & e = y_1y_2 \\ i + 4 & e = zy_i \\ 2i + 6 & e = zb_i \end{cases}$$

Untuk $n = 3$ *Crab Graph* (Cr_n) memiliki jumlah warna minimal yaitu 6. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 8. Dengan demikian, banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Crab Graph* (Cr_n) adalah sebanyak $n + 3$. Jadi terbukti bahwa $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$.

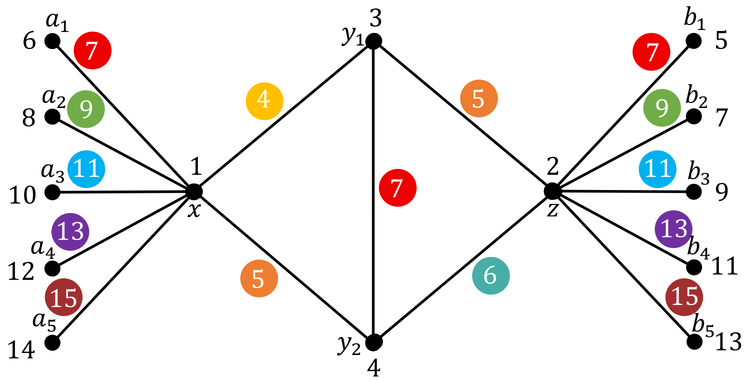
Dapat disimpulkan bahwa *Crab Graph* (Cr_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n) sebagai berikut:



Gambar 4.4 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_3)



Gambar 4.5 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_4)



Gambar 4. 6 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_5)

4.2 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Squid Graph* (Sqn)

Squid Graph (Sqn) atau graf cumi-cumi adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Sqn dengan himpunan titik $V(\text{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ dan himpunan sisi $E(\text{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$ sehingga $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$.

Teorema 2. *Squid Graph* (Sqn) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$.

Bukti. *Squid Graph* (Sqn) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(\text{Sq}_n) = \{x_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Squid Graph* (Sq_n) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(\text{Sq}_n) = \{zx_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_1, zy_2\} \cup \{y_1y_2\}$$

Graf cumi-cumi ini memiliki kardinalitas titik $|V| = n + 3$ dan kardinalitas sisi $|E| = n + 3$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Squid Graph* (Sq_n). Himpunan titik x_i dilabeli dengan label $\{4,5, \cdots, n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik x_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(x_i) = i + 3$. Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 1$. Himpunan titik y_1, y_2 dilabeli dengan label $\{2,3\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = i + 1$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} i + 3, & v = x_i \\ i + 1, & v = y_i \\ 1, & v = z \end{cases}$$

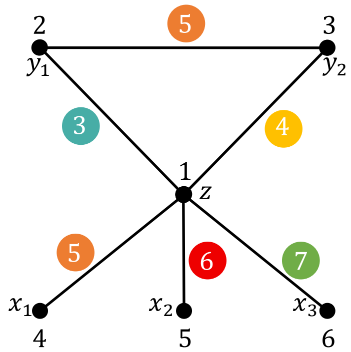
Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Squid Graph* (Sq_n). Himpunan sisi zx_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, n + 4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zx_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zx_i) = i + 4$. Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{3, n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = i + 2$. Himpunan sisi y_1y_2 dibobotkan dengan label $\{5\}$. Sehingga diperoleh $w(y_1y_2) = 5$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

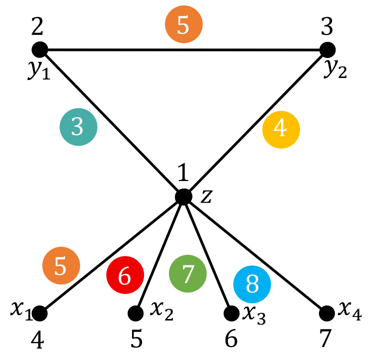
$$w(e) = \begin{cases} i+4, & e = zx_i \\ i+2, & e = zy_i \\ 5, & e = y_1y_2 \end{cases}$$

Untuk $n = 3$ *Squid Graph* (Sq_n) memiliki jumlah warna minimal yaitu 5. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 6. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Dengan demikian, banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Squid Graph* (Sq_n) adalah sebanyak $n + 2$. Jadi terbukti bahwa $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$.

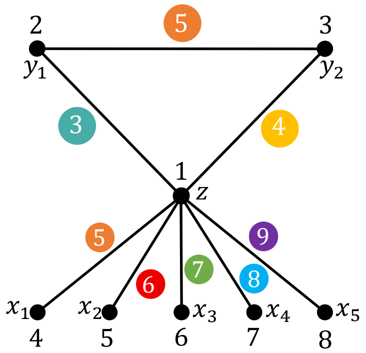
Dapat disimpulkan bahwa *Squid Graph* (Sq_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* (Sq_n) sebagai berikut:



Gambar 4.7 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* (Sq_3)



Gambar 4.8 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* (Sq_4)



Gambar 4.9 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Squid Graph* (Sq_5)

4.3 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Pada *Jellyfish Graph* (Jf_n)

Jellyfish Graph (Jf_n) atau graf ubur-ubur adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Jf_n dengan himpunan titik $V(Jf_n) = \{z\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Jf_n) = \{zy_i, xy_i, xa_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$.

Teorema 3. *Jellyfish Graph* (Jf_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $\chi_{lea}(Jf_n) = n + 3$.

Bukti. *Jellyfish Graph* (Jf_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi, himpunan titik pada graf ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(Jf_n) = \{z\} \cup \{y_i\,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\} \cup \{a_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf ini, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut himpunan sisi. Himpunan sisi pada *Jellyfish Graph* (Jf_n) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(Jf_n) = \{zy_i, xy_i, xa_i\,; 1 \leq i \leq n\}$$

Graf ubur-ubur ini memiliki kardinalitas titik $|V| = 2n + 2$ dan kardinalitas sisi $|E| = 3n$. Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik dan bobot sisi pada graf tersebut. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada *Jellyfish Graph* (Jf_n). Himpunan titik z dilabeli dengan label $\{2\}$. Sehingga diperoleh $f(z) = 2$. Himpunan titik y_i dilabeli dengan label $\{3, \cdots, 2n + 1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik y_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(y_i) = 2i + 1$. Himpunan titik x dilabeli dengan label $\{1\}$. Sehingga diperoleh $f(x) = 1$. Himpunan titik a_i dilabeli dengan label $\{4, \cdots, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik a_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $f(a_i) =$

$2i + 2$. Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 2, & v = z \\ 2i + 1, & v = y_i \\ 1, & v = x \\ 2i + 2, & v = a_i \end{cases}$$

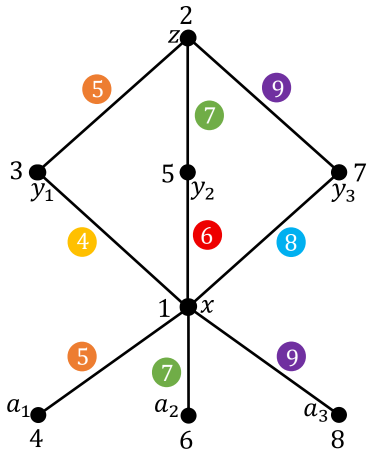
Kedua, dibobotkan semua himpunan sisi pada *Jellyfish Graph* (Jf_n). Himpunan sisi zy_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi zy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(zy_i) = 2i + 3$. Himpunan sisi xy_i dibobotkan dengan label $\{4, \cdots, 2n + 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xy_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xy_i) = 2i + 2$. Himpunan sisi xa_i dibobotkan dengan label $\{5, \cdots, 2n + 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi xa_i berjalan dari $\{1, \cdots, n\}$. Sehingga diperoleh $w(xa_i) = 2i + 3$.

Setelah semua bobot pelabelan sisi didapatkan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

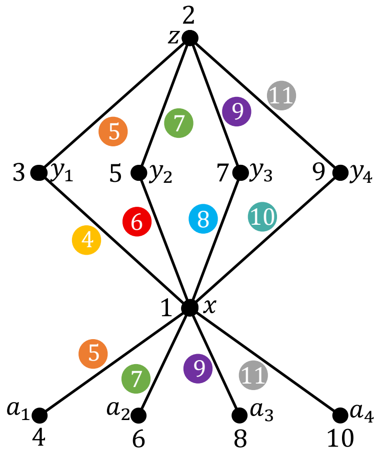
$$w(e) = \begin{cases} 2i + 3, & e = zy_i \\ 2i + 2, & e = xy_i \\ 2i + 3, & e = xa_i \end{cases}$$

Untuk $n = 3$ *Jellyfish Graph* (Jf_n) memiliki jumlah warna minimal yaitu 6. Selanjutnya untuk $n = 4$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 7. Selain itu, untuk $n = 5$, maka jumlah warna minimalnya yaitu 8. Dengan demikian, banyaknya warna minimal yang diaplikasikan pada *Jellyfish Graph* (Jf_n) adalah sebanyak $n + 3$.

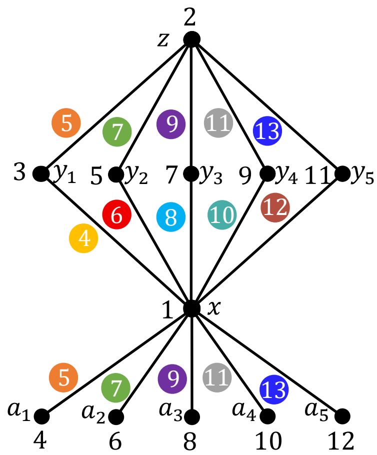
Dapat disimpulkan bahwa *Jellyfish Graph* (Jf_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, maka bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(\mathrm{Jf}_n) = n + 3$. Ilustrasi mengenai hasil pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* (Jf_n) sebagai berikut:



Gambar 4.10 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* (Jf_3)



Gambar 4.11 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* (Jf_4)



Gambar 4.12 Pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Jellyfish Graph* (Jf_5)

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan yaitu:

1. *Crab Graph* (Cr_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 4$ dan $|E| = 2n + 5$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Cr_n) = n + 3$.
2. *Squid Graph* (Sq_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = n + 3$ dan $|E| = n + 3$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu $x_{lea}(Sq_n) = n + 2$.
3. *Jellyfish Graph* (Jf_n) dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$, ini memiliki kardinalitas yaitu $|V| = 2n + 2$ dan $|E| = 3n$ serta mempunyai bilangan kromatik untuk pewarnaan lokal sisinya yaitu yaitu $x_{lea}(\mathrm{Jf}_n) = n + 3$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n) Dan *Jellyfish Graph* (Jf_n) maka peneliti memberikan saran kepada pembaca yaitu:

1. Penelitian selanjutnya disarankan tidak hanya membahas pewarnaan lokal sisi *antimagic*, tetapi juga mencakup pewarnaan titik dan pewarnaan wilayah agar hasilnya lebih komprehensif.
2. Objek graf yang diteliti dapat diperluas, tidak terbatas pada *Crab Graph* (Cr_n), *Squid Graph* (Sq_n), *Jellyfish Graph* (Jf_n) saja, tetapi juga mencakup jenis graf lainnya untuk memperoleh generalisasi yang lebih luas.
3. Pelabelan pada penelitian berikutnya dapat menggunakan himpunan bilangan atau metode pelabelan lainnya sehingga variasi hasilnya dapat dibandingkan.
4. Penelitian selanjutnya dapat melakukan pengembangan yang lebih otomatis, seperti algoritma atau perangkat lunak khusus, sehingga dapat mempermudah

penentuan bobot sisi dan bilangan kromatik minimum pada pewarnaan lokal sisi *antimagic*.

5. Penelitian selanjutnya dapat mengintegrasikan hasil pewarnaan graf ini dengan bidang lain, misalnya optimasi jaringan atau penjadwalan untuk meningkatkan relevansi praktis.

DAFTAR PUSTAKA

Afriantini, Helmi, & Fran, F. (2019). Pewarnaan Sisi, Simpul, Wilayah Pada Graf dan Penerapannya. *Portal Jurnal UNTAN*, 773-782.

Agustin, I. H., Hasan, M., Dafik, Alfarisi, R., & Prihandini, R. M. (2017). Local Edge Antimagic Coloring of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Impressed.

Agustin, I. H., Hasan, M., Dafik, Alfarisi, R., Kristiana, A. I., & Prihandini, R. M. (2017). Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Impressed.

AH, N. I. (2011). ANALISIS TENTANG GRAF PERFECT. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*.

Arumugam, S. K., Premalatha, M., Baca, M., & Semanicova-Fenovcikova, A. (2017). Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, 275-285.

Dafik, Wahidah, R. N., Albirri, E. R., & Husain, S. K. (2023). On the study ofRainbow Antimagic Coloring of Special Graphs. *CAUCHY – Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 585-596.

Fatihah, N. N. (2017). *Analisis Pewarnaan Titik dan Sisi r-Dinamis Pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi Cn]H.* Skripsi.

Gia, M., Putra, G. L., & Haning, F. O. (2024). Graf Cayley Pada Grup Dihedral D2n. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, 158-167.

Joko, Y., Helmi, & Fran, F. (2019). BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF PLANTER DAN GRAF GURITA. *Buletin Ilmiah Math*, 29-34.

Mawaddah, A. R., & Budayasa, I. K. (2024). Pelabelan Total Ajaib Titik Genap Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 496-506.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika Bandung.

Nurhidayah, F., & Susanti, Y. (2022). Pelbelan k−Prima Pada Beberapa Kelas Graf Gabungan Lintasan. *Jurnal Matematika Thales*.

Parkhurst, H. (2014). PELABELAN TOTAL (a, d) -SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GABUNGAN GRAF LENGKAP mKn. *Jurnal Matematika UNAND*, 24-27.

Rahman, A., Narwen, & Baqi, A. I. (2019). PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB PADA GRAF PETERSEN P (n, 2), UNTUK n GANJIL, n ≥ 3. *Jurnal Matematika UNAND*, 1-4.

Rahmatullah, R. (2021). *Matematika: Barisan dan Deret Aritmatika untuk SMA/MA*. Medan: Flip Builder.

Rezekina, L. (2016). Pelabelan Total (a,d)-C3-Antiajaib Super Pada Graf Ular Sn. *Skripsi*.

Rohmatillah, N. (2018). *Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic Pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Shackle.* Jember: Universitas Jember.

Rokad, A. H., & Patadiya, K. M. (2017). Cordial Labeling of Some Graphs. *Aryabhatta Journal of Mathematics and Informatics*, 589-597.

Sa'adah, E. N. (2018). *Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi C3, Bt2, K2,3, W3.* Jember: Universitas Jember.

Slamin. (2009). *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf.* Jember: Universitas Jember.

Susanto, D., Kurniawan, T., Sihombing, S. K., Salim, E., Radjawane, M. M., Salmah, U., & Wardani, A. K. (2021). *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi.

Wardhani, A. S. (2022). *Barisan dan Deret Aritmatika.* Jakarta: anyflip.

Wilson, R. J. (2015). *Pengantar Teori Graf.* Jakarta: Erlangga.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Riwayat Hidup

Nama	: Dinda Mulyasari
NIM	: 202120004
Tempat / Tgl. Lahir	: Situbondo, 13 Oktober 2002
Jenis Kelamin	: Perempuan
Agama	: Islam
Alamat	: Olean Selatan RT 01 RW 01, Kecamatan Situbondo, Kabupaten Situbondo
No. HP	: 082310130913

Riwayat Pendidikan :

1. TK Aisyiyah 3 Situbondo (2006 - 2008)
2. SDN 4 Curah Jeru (2008 - 2014)
3. SMPN 3 Situbondo (2014 - 2017)
4. SMAN 1 Situbondo (2017 - 2020)
5. S1 Administrasi Publik FISIP UNARS (2020 - 2024)
6. S1 Matematika FPST UNARS (2021 - 2025)

Pengalaman Organisasi:

1. BEM FISIP UNARS (2022 - 2023)
2. PIK-R Cemara UNARS (2023 - 2024)
3. HMP SIGMA UNARS (2022 - 2024)
4. Situbondo Peduli Bumi (2023 - Sekarang)
5. Ark Of Mangrove (2025 - Sekarang)

Pengalaman Kerja:

1. PKL di POLRES Situbondo bagian SDM (2022)
2. Petugas Entri Data Sensus Pertanian (2023)
3. Pengawas TPS Pemilu (2024)