Santoso M.Si

BAB 6.docx

Universitas Abdurachman Saleh

Document Details

Submission ID

trn:oid:::8135:72295848

Submission Date

Nov 26, 2024, 7:48 AM GMT+7

Download Date

Nov 26, 2024, 7:49 AM GMT+7

File Name

BAB 6.docx

File Size

299.9 KB

12 Pages

1,520 Words

8,669 Characters

21% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Top Sources

20% Internet sources

3% Publications

0% Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

0 Integrity Flags for Review

No suspicious text manipulations found.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

Top Sources

20% Internet sources
3% Publications
0% Submitted works (Student Papers)

Top Sources

The sources with the highest number of matches within the submission. Overlapping sources will not be displayed.

1	Internet	
	repository.usd.ac.id	3%
2	Internet	
	123dok.com	3%
3	Internet	
	www.coursehero.com	2%
4	Internet	
	idoc.pub	2%
5	Internet	
	matematika.unars.ac.id	1%
6	Internet	
	www.konsep-matematika.com	1%
7	Internet	
	pdfcoffee.com	1%
8	Internet	
	roboguru.ruangguru.com	1%
9	Internet	
	www.slideshare.net	1%
10	Publication	
	Sabine O'Hara, Thomas S. Kakovitch. "Water as driver of economic capacity: Intro...	1%
11	Internet	
	vaskoedo.wordpress.com	1%

12 Internet

geograf.id 1%

13 Internet

ia601904.us.archive.org 1%

14 Internet

repository.its.ac.id 1%

15 Internet

publikasi.dinus.ac.id 0%

16 Internet

torotriblog.wordpress.com 0%

17 Internet

repositori.kemdikbud.go.id 0%

BAB 6
MAKSIMUM DAN MINIMUM SUATU FUNGSI

6.1 Pendahuluan

1 Salah satu konsep inti dari analisis matematika adalah nilai maksimum dan minimum suatu fungsi. Konsep ini memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang seperti ekonomi, fisika, teknik, dan agribisnis serta masih banyak ilmu lain yang
9 menerapkan konsep nilai maksimum minimum. Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering dihadapkan pada masalah optimasi, seperti mencari cara untuk memaksimalkan keuntungan, meminimalkan biaya, atau menentukan efisiensi terbaik dalam suatu proses. Semua itu bermuara pada pemahaman tentang bagaimana suatu fungsi berperilaku dalam domain tertentu.

Secara sederhana, nilai maksimum adalah titik tertinggi yang dapat dicapai suatu fungsi dalam rentang tertentu, sedangkan nilai minimum adalah titik terendah. Dalam dunia nyata, ini bisa berarti laba maksimum yang bisa diraih oleh sebuah
2 perusahaan, atau waktu minimum yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan. Pemahaman tentang nilai-
12 nilai ekstrem ini memungkinkan kita untuk membuat keputusan yang lebih baik dan optimal.

Pendahuluan ini akan membuka pintu untuk memahami konsep dasar dan teknik perhitungan serta aplikasi praktis dari nilai maksimum dan minimum. Dengan pengetahuan ini, pembaca akan dibekali alat yang kuat untuk memecahkan berbagai masalah optimasi, baik dalam konteks akademik maupun kehidupan nyata.

6.2 Pengertian Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi

Konsep nilai maksimum dan minimum suatu fungsi telah menjadi salah satu topik penting. Stewart (2012) dalam bukunya menjelaskan bahwa nilai maksimum adalah nilai tertinggi yang dicapai oleh suatu fungsi pada interval tertentu, sedangkan nilai minimum adalah nilai terendah. Secara formal, fungsi $f(x)$ memiliki maksimum atau minimum pada titik $x = c$ jika untuk semua nilai x dalam daerah $f(x)$, berlaku $f(c) \geq f(x)$ (maksimum) atau $f(c) \leq f(x)$ (minimum).

Dalam matematika, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi tidak hanya ditemukan melalui pengamatan visual grafik, tetapi juga melalui analisis matematis. Dengan menggunakan alat seperti turunan pertama dan kedua, kita dapat menentukan titik-titik kritis yang mungkin menjadi tempat fungsi mencapai nilai ekstremnya.

6.3 Kriteria Penentuan Maksimum dan Minimum

Kriteria penentuan maksimum dan minimum suatu fungsi berkaitan erat dengan penggunaan turunan. Thomas dan Finney (2010) mengemukakan pendapatnya bahwa turunan pertama $f'(x)$ digunakan untuk menemukan titik stasioner yang merupakan titik di mana turunan pertama bernilai nol (0) atau tidak terdefinisi.

9 Langkah-langkah dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi yang memiliki selang interval tertentu diantaranya:

a) menentukan nilai stasioner dalam interval (jika ada)
1 b) Menentukan nilai-nilai fungsi pada tiap ujung interval
7 c) Nilai terbesar dari nilai yang diperoleh merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.

Contoh soal:
Tentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi $f(x) = x^2 - 2x$ dalam selang interval $-4 \leq x \leq 4$!
penyelesaian:

2 Turunan dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x) = 2x - 2$
Syarat stasioner adalah $f'(x) = 0$

$$2x - 2 = 0$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Nilai stasioner:
$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$
Nilai pada selang interval
$f(-4) = (-4)^2 - 2(-4) = 24$
$f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$
1 Berdasarkan perhitungan nilai fungsi pada titik stasioner dan pada ujung-ujung selang interval, maka dapat
15 disimpulkan bahwa nilai maksimumnya adalah 24 dan nilai minimumnya adalah -1.

Selain menggunakan turunan pertama untuk khususnya pada titik stasioner dan titik kritis dalam mementukan nilai maksimum dan minimum, dapat juga menggunakan turunan kedua $f''(x)$ dalam menentukan sifat suatu titik yaitu:

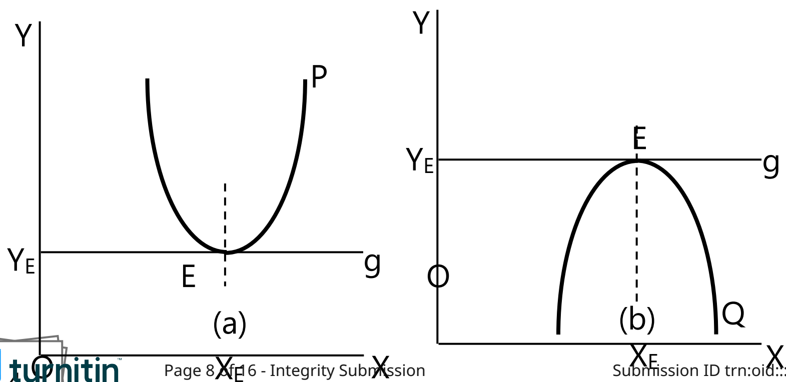
- $f''(x) > 0$: Minimum lokal.
- $f''(x) < 0$: Maksimum lokal.
- $f''(x) = 0$: Analisis lebih lanjut diperlukan.

6.4 Titik Ekstrim

Titik ekstrim dari suatu fungsi $Y = f(x)$ merupakan titik tertinggi atau titik terendah yang dapat dicapai oleh kurva. Hal ini berarti bahwa koefisien arah garis singgung terhadap fungsi tersebut pada titik ekstrimnya adalah nol (0). Koefisien arah suatu garis singgung terhadap suatu fungsi pada suatu titik dapat dikatatakan sebagai turunan pertama dari fungsi tersebut. Sehingga titik ektrim dari suatu fungsi $Y = f(x)$ akan tercapai pada saat turunan pertamanya sama dengan nol.

$$Y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

Berikut ini adalah contoh gambar kurva suatu fungsi:



dimana :

- P dan Q adalah kurva suatu fungsi $Y = f(x)$
- Titik E adalah titik Ekstrim
- Garis g adalah garis singgung terhadap kurva pada masing–masing titik ekstrimnya dimana koefisien arahnya sama dengan nol.

Dari turunan (*derevative*) pertama $Y = f(x)$ sama dengan nol atau dari $Y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ akan diperoleh absis titik ekstrim (X_E) yang kemudian disubstitusikan terhadap $Y = f(x)$ untuk memperoleh ordinat titik ekstrim fungsi tersebut (Y_E) sehingga koordinat titik ekstrimnya adalah E (X_E,Y_E).

Dari kedua gambar diatas ternyata pada gambar (a) kurva P menghadap keatas, sehingga titik E merupakan **titik minimum** dari $Y = f(x)$. Sebaliknya pada gambar (b) kurva Q menghadap kebawah, sehingga titik E merupakan **titik maksimum** dari $Y = f(x)$.

Perbedaan dari kedua titik ekstrim tersebut terletak pada turunan kedua (derevative kedua) dari $Y = f(x)$ atau dari $Y'' = f''(x)$ pada masing–masing absis titik ekstrim (X_E) nya yaitu:

a) Apabila $Y'' = f''(x) > 0$, maka titik ekstrim tersebut merupakan **titik minimum** sehingga grafiknya menghadap keatas berbentuk cekung.

b) Apabila $Y'' = f''(x) < 0$, maka titik ekstrim tersebut merupakan **titik maksimum** sehingga grafiknya meghadap kebawah berbentuk cembung.

Contoh Soal:

Diketahui suatu fungsi $Y = x^2 - 4x + 3$. Tentukan titik ekstrim dan titik maksimum/miinimum dari fungsi tersebut!

Jawab:

16 1) Titik ekstrim → $Y' = f'(x) = 0$

Maka turunan pertama dari fungsi $Y = x^2 - 4x + 3$

1 adalah $Y' = 2x - 4$ → $2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$ (absis titik ekstrim)

4 Pada $x = 2$, maka nilai $Y = (2)^2 - 4(2) + 3$

$Y = 4 - 8 + 3$

$Y = -1$ (ordinat titik ekstrim)

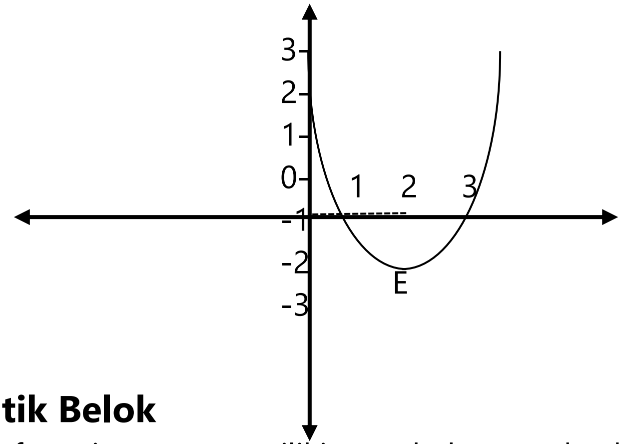
8 2) Nilai maksimum/minimum (mencari turunan kedua)

$Y'' = f''(x) = 2 > 0$

Karena nilai $Y'' > 0$, maka titik ekstrim tersebut merupakan titik minimum.

Jadi titik $E(2, -1)$ merupakan titik minimum dari fungsi $Y = x^2 - 4x + 3$ sehingga kurvanya menghadap keatas (berbentuk cekung).

Berikut gambar kurva dari fungsi $Y = x^2 - 4x + 3$.



6.5 Titik Belok

Suatu fungsi yang memiliki perubahan arah dari cekung (*concave upward*) ke cembung (*concave downward*) dan berubah kembali ke cekung (*concave upward*) disebut sebagai titik belok. Suatu fungsi yang mempunyai titik maksimum dan titik minimum serta tidak mempunyai titik ekstrim (maksimum atau minimum) maka dipastikan akan memiliki titik belok.

Adapun syarat untuk titik belok dari suatu fungsi adalah turunan, ke dua (derevative kedua) dari fungsi tersebut sama dengan nol. Apabila persamaan fungsinya $Y = f(x)$, maka titik beloknya terletak pada $Y'' = f''(x) = 0$.

Dari $Y'' = 0$ ini akan diperoleh absis titik belok $(-X_B)$ yang kemudian disubstitusikan terhadap $Y = f(x)$ untuk memperoleh ordinat dari fungsi tersebut (Y_B), sehingga koordinat titik belok terletak pada titik $(-X_B, Y_B)$. Dalam masalah titk maksimum dan titik minimum dikenal dua istilah, yaitu :

a) Absolut maksimum/minimum

Absolut maksimum ialah titik yang dicapai ketika Y pada suatu absis bernilai paling tinggi dari seluruh nilai fungsi $Y = f(x)$,
dimana : $Y'' = k < 0$.
Contohnya adalah titik puncak suatu parabola yang terbuka (menghadap) ke bawah.
Absolut minimum ialah titik yang dicapai ketika Y pada suatu absis bernilai paling rendah dari seluruh nilai yang diperoleh pada fungsi $Y = f(x)$,
dimana : $Y'' = f''(x) =$ bilangan konstan positif $(k > 0)$.
Contohnya adalah titik puncak suatu parabola yang terbuka (menghadap) ke atas.
Pada suatu fungsi kuadrat $Y = f(x)$ baik yang menghadap keatas maupun yang kebawah, tidak terdapat titik belok karena $Y'' = k$ (bilangan konstan).

b) Relatip maksimum/minimum
Relatif maksimum ialah titik yang dicapai ketika Y pada suatu absis bernilai paling tinggi dari nilai–nilai y lain yang berdekatan (sekitarnya) pada fungsi $Y = f(x)$.
Sebaliknya yang dimaksud dengan relatif minimum ialah titik yang dicapai ketika Y pada suatu absis bernilai paling rendah dari nilai-nilai y lain yang berdekatan (sekitarnya) pada fungsi $Y = f(x)$.

Dengan demikian relatif maksimum/minimum terdapat pada fungsi yang mempunyai titik maksimum dan titik minimum sekaligus, sehingga mempunyai titik belok yaitu pada turunan (*derevative*) kedua sama dengan nol. Atau terdapat pada fungsi yang mempunyai titik ekstrim lebih dari satu.

Contoh : $Y = x^3 + 4x^2 - 7$

1) Titik Ekstrim $\rightarrow Y' = f'(x) = 0$

$Y' = 3x^2 + 8x = 0$

$x\ (3x^2 + 8) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{8}{3} = -2\ \frac{2}{3}$

(mempunyai dua titik ekstrim).

Untuk $x_1 = 0$, maka $Y = 0^3 + 4.0^2 - 7 = -7$

Sehingga koordinat titik ekstrim yang pertama (E_1) adalah $E_1\ (0, -7)$.

Untuk $x_2 = -2\frac{2}{3}$,

maka $Y = (-2\frac{2}{3})^3 + 4(-2\frac{2}{3})^2 - 7 = 2\frac{13}{27}$

Sehingga koordinat titik ekstrim yang kedua (E_2) adalah $E_2(-2\frac{2}{3}, 2\frac{13}{27})$.

4

2) Relatif maksimum/minimum $Y'' = f''(x)$

$Y' = f'(x) = 3x^2 + 8x$

$Y'' = f''(x) = 6x + 8$

Untuk $x_1 = 0$, maka $Y'' = f''(0) = 6.0 + 8 = 8$

$Y'' = 8 > 0 \rightarrow$ minimum.

Jadi titik ekstrim pertama $E_1\ (0, -7)$ adalah merupakan titik *relatif minimum*.

Untuk $x_2 = -2\ \frac{2}{3}$

maka $Y'' = f''(-2\ \frac{2}{3}) = 6.(-2\frac{2}{3}) + 8 = -8$

$Y'' = -8 < 0 \rightarrow$ maksimum.

Jadi titik ekstrim kedua : $E_2\ (-2\ \frac{2}{3}, 2\ \frac{13}{27})$ adalah merupakan titik *relatif maksimum*.

11

3) Titik Belok $\rightarrow Y'' = f''(x) = 0$

13

$$Y = 6x + 8 = 0$$
$$6\left(x + 1\frac{2}{6}\right) = 0$$
$$x = -1\frac{2}{6} = -1\frac{1}{3}$$

Untuk $x = -1\frac{1}{3}$, maka

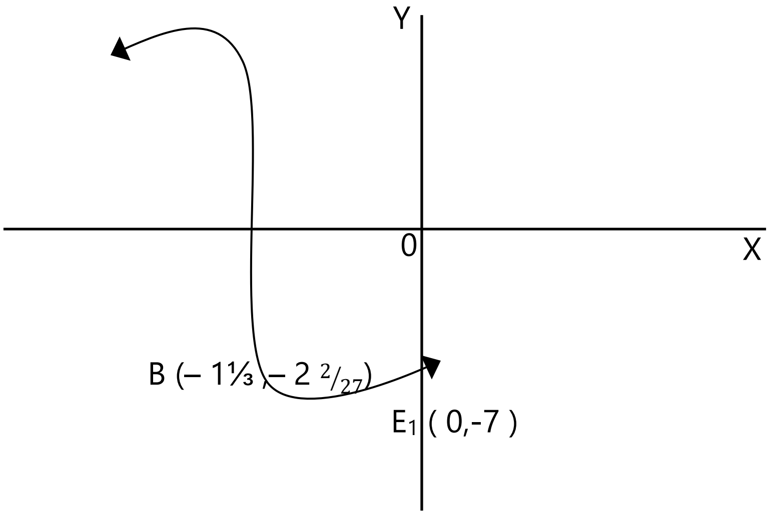
$$Y = (-1\tfrac{1}{3})^3 + 4(-1\tfrac{1}{3})^2 - 7 = -2\frac{7}{27}$$

Jadi koordinat titik belok adalah : E $(-1\frac{1}{3}, -2\frac{7}{27})$

4) Gambar kurva

Untuk menggambaar kurva $Y = x^3 + 4x^2 - 7$ diperlukan titik–titik penolong yang dicari dengan cara tracing proses.

Gambar : $E_2\left(-2\frac{2}{3}, 2\frac{13}{27}\right)$



DAFTAR PUSTAKA

Stewart, J. 2012. Kalkulus. Edisi 5 Jilid 1. Cengage Learning. Salemba : Teknika.

10 Thomas, G. and Finney, R. 2010. *Calculus And Analytic Geometry*. 5th Edition. Addison Wesley.

BIODATA PENULIS

Santoso, S.Si., M.Si
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi
Universitas Abdurachman Saleh Situbondo

Penulis lahir di Solo tanggal 17 Maret 1984. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Fakultas Pertanian, Sains dan Teknologi Universitas Abdurachman Saleh Situbondo. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Universitas Jember dan menyelesaikan pendidikan S2 pada Jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Penulis menekuni bidang Matematika dan Statistik.
Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: santoso@unars.ac.id